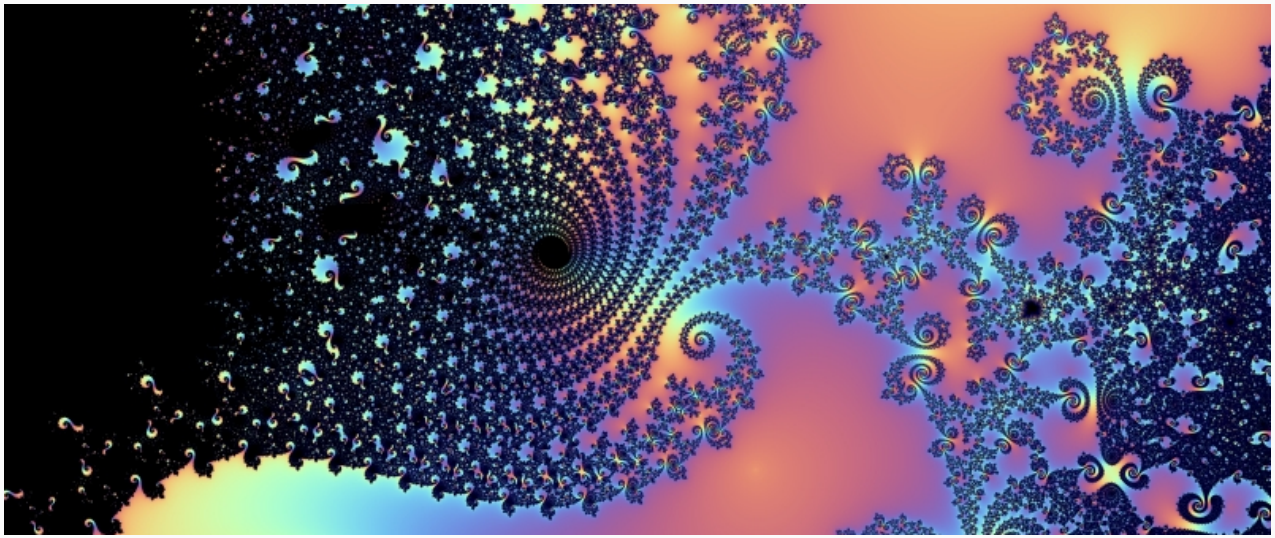
Frattali



Federico Munini

19 agosto 2026

Summer Math Camp – Tarvisio

Indice

Introduzione

Alcuni frattali famosi

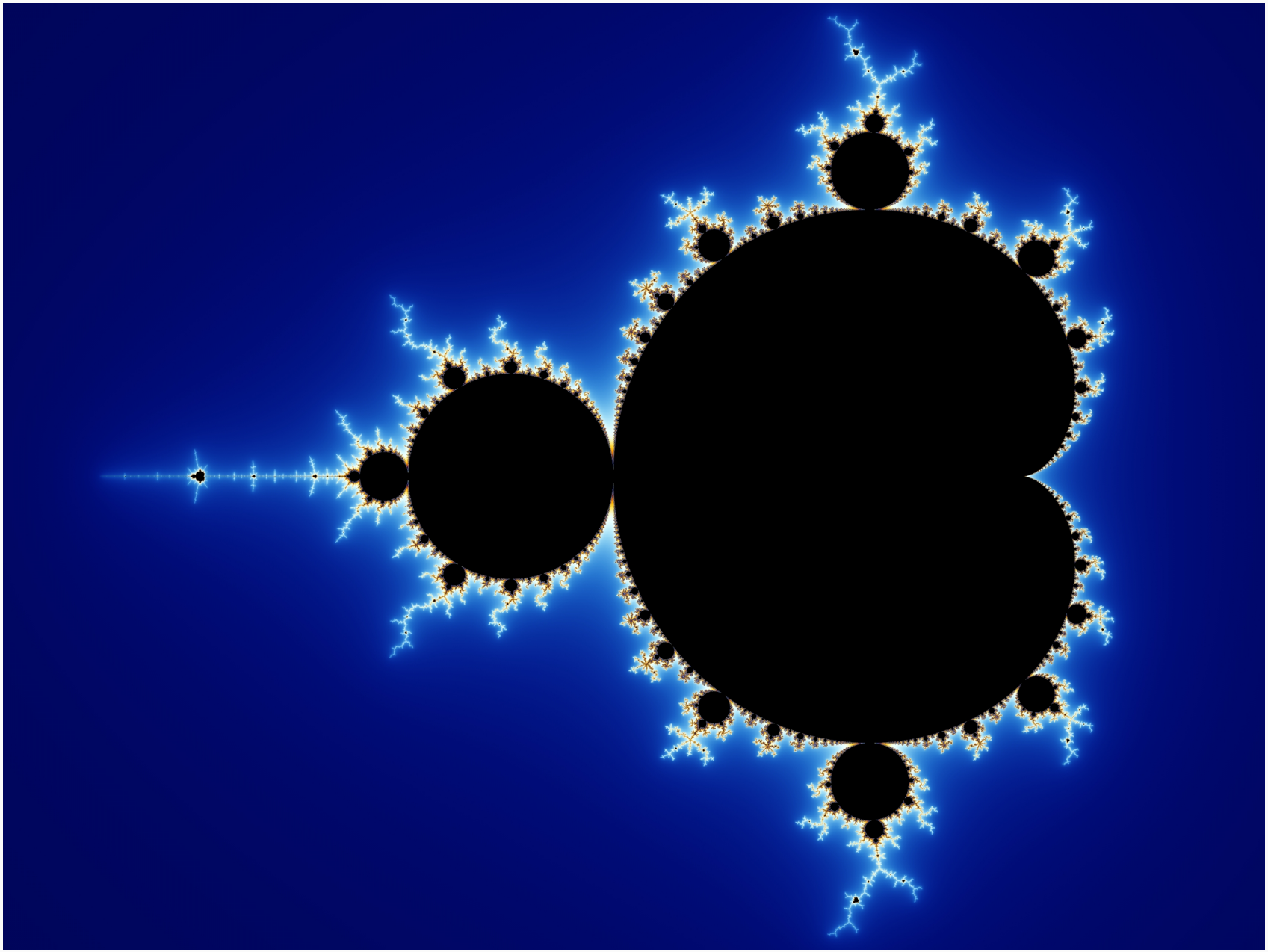
La dimensione frattale

L'insieme di Mandelbrot

Frattali in natura

Introduzione

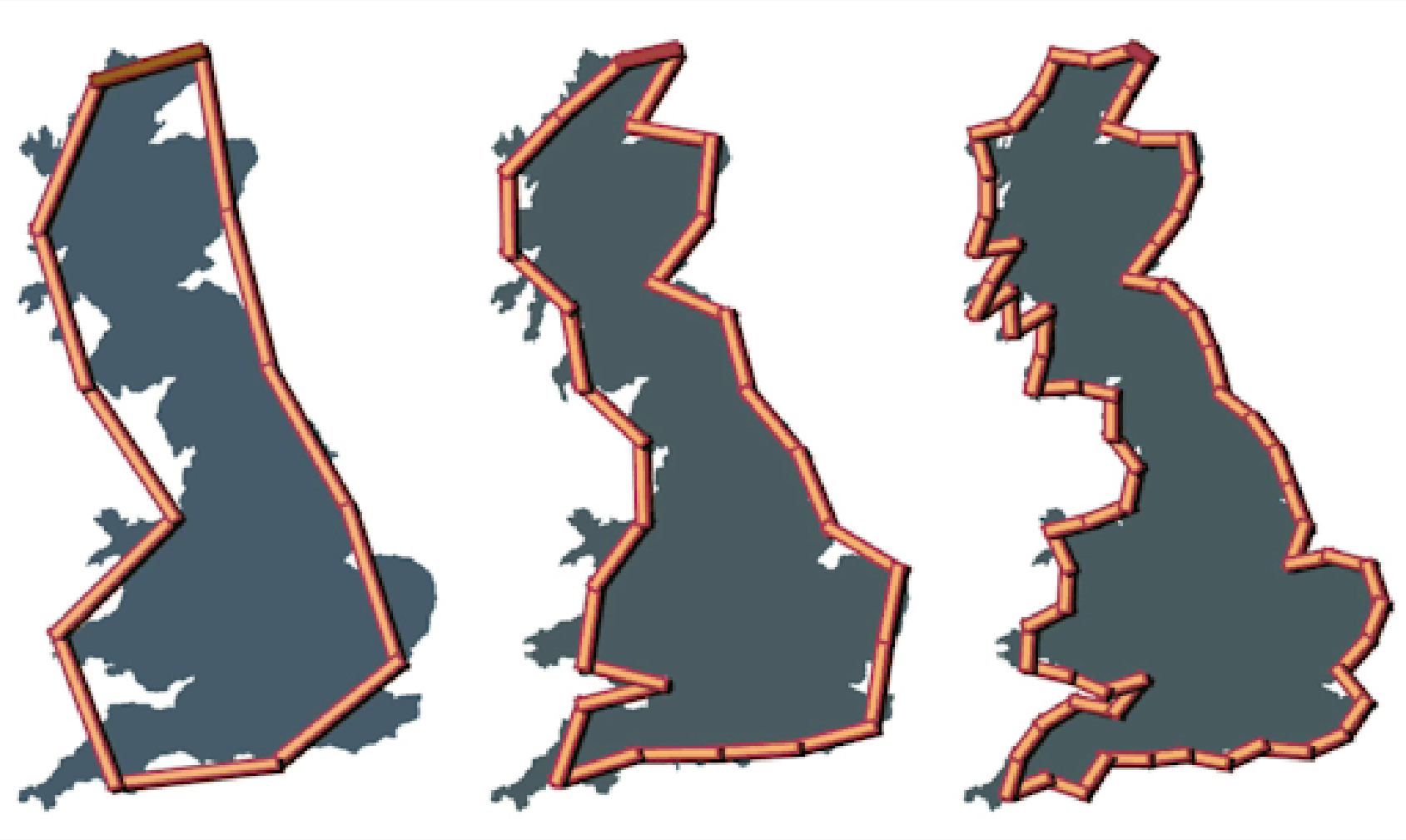
L'insieme di Mandelbrot



Come misurare la lunghezza della costa?



Come misurare la lunghezza della costa?



200 km
2400 km

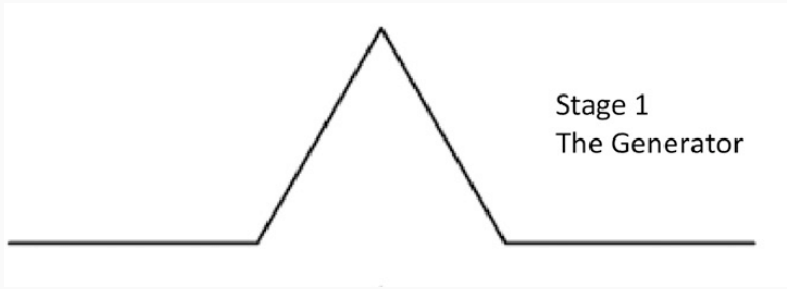
100 km
3300 km

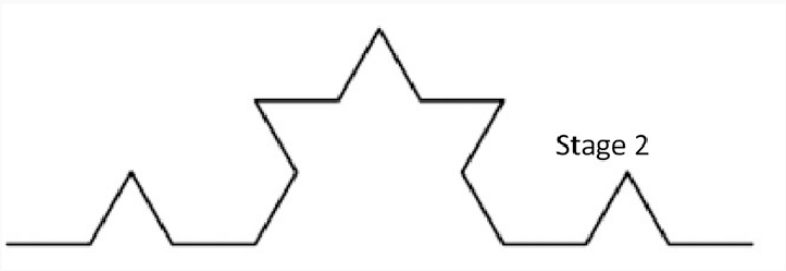
50 km
3850 km

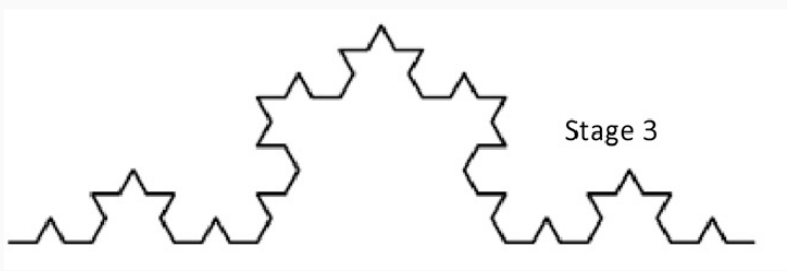
Alcuni frattali famosi

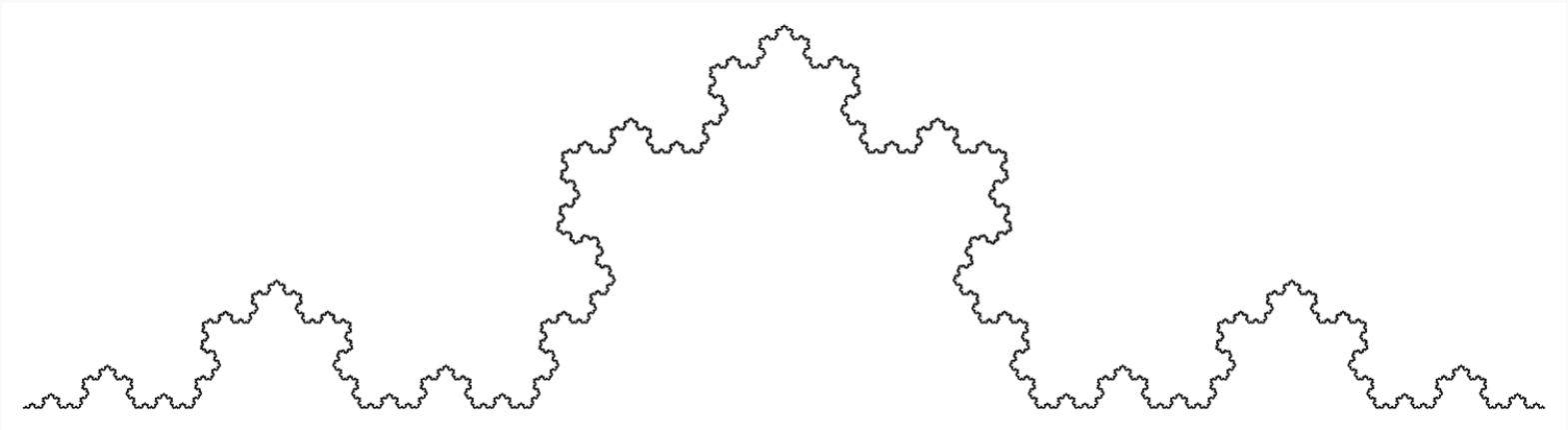
La curva di Koch











Lunghezza della curva di Koch

Indichiamo con L_n la lunghezza della curva al passo n.

$$L_0 = L$$

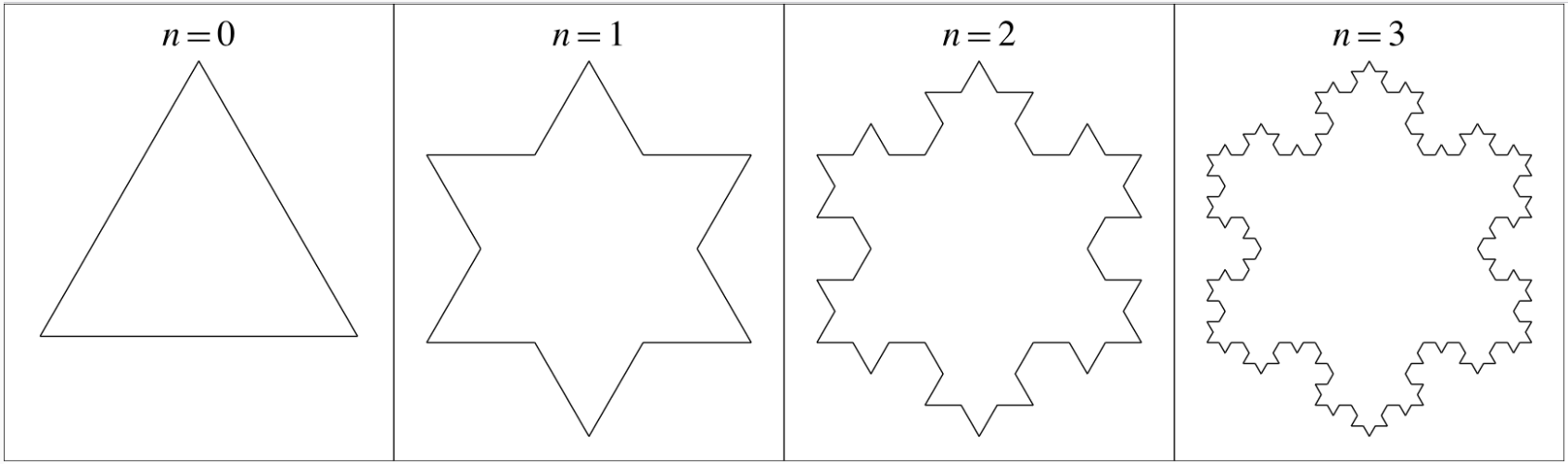
$$L_1 = \frac{4}{3} L_0 = \frac{4}{3} L$$

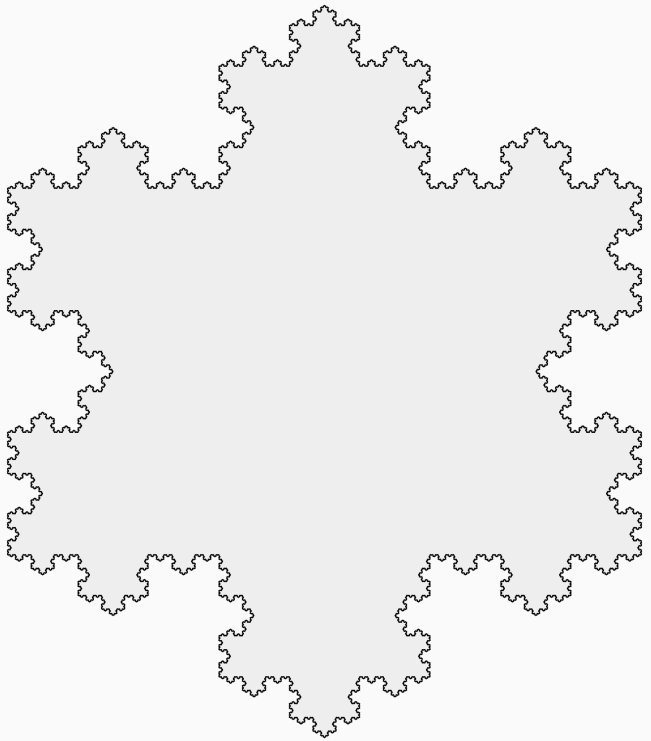
$$L_2 = \frac{4}{3} L_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 L$$

$$\dots$$

$$L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n L \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

Il fiocco di neve di Koch





Area del fiocco di neve

Indichiamo con A l'area del triangolo iniziale e calcoliamo l'area A_n del fiocco di neve al passo n.

Indichiamo con L_n il numero di lati al passo n.

$$L_0 = 3, L_1 = 3 \cdot 4 = 12, \ldots, L_n = 3 \cdot 4^n$$

A ogni passo vengono aggiunti $L_{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1}$ triangolini.

Indichiamo con Δ_n l'area di ogni triangolino aggiunto al passo n.

$$\Delta_1 = \frac{1}{9}A, \Delta_2 = \frac{1}{9}\Delta_1 = \left(\frac{1}{9}\right)^2 A, \ldots, \Delta_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n A$$

Area del fiocco di neve

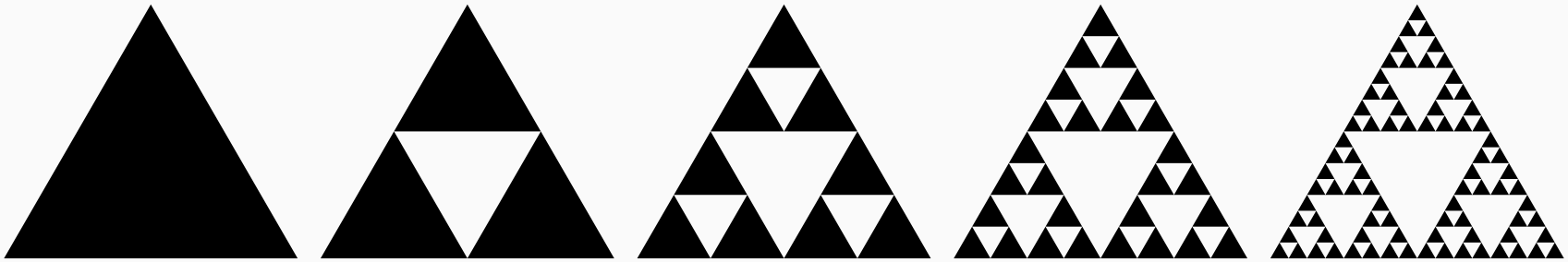
L'area del fiocco di neve al passo n è:

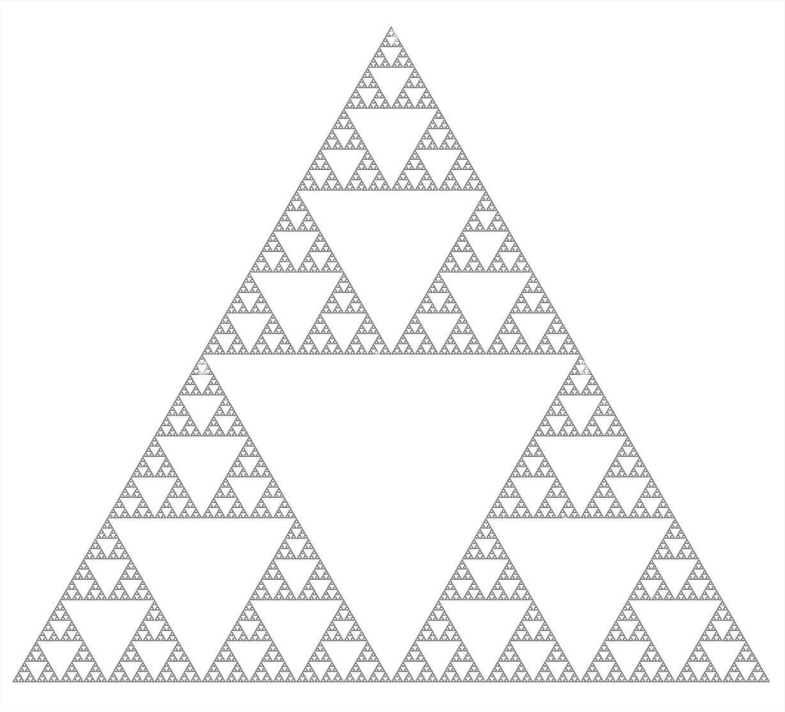
$$
\begin{aligned}
A_n &= A + 3 \cdot \frac{1}{9}A + 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 A + 3 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 A + \cdots + 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n A \\
&= A\left(1 + \sum_{k=1}^{n} 3 \cdot 4^{k-1} \left(\frac{1}{9}\right)^k\right) \\
&= A\left(1 + \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^k\right)
\end{aligned}
$$

L'area del fiocco di neve è quindi:

$$
\lim_{n\to\infty} A_n = A\left(1 + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{1 - 4/9} - 1\right)\right) = \frac{8}{5}A
$$

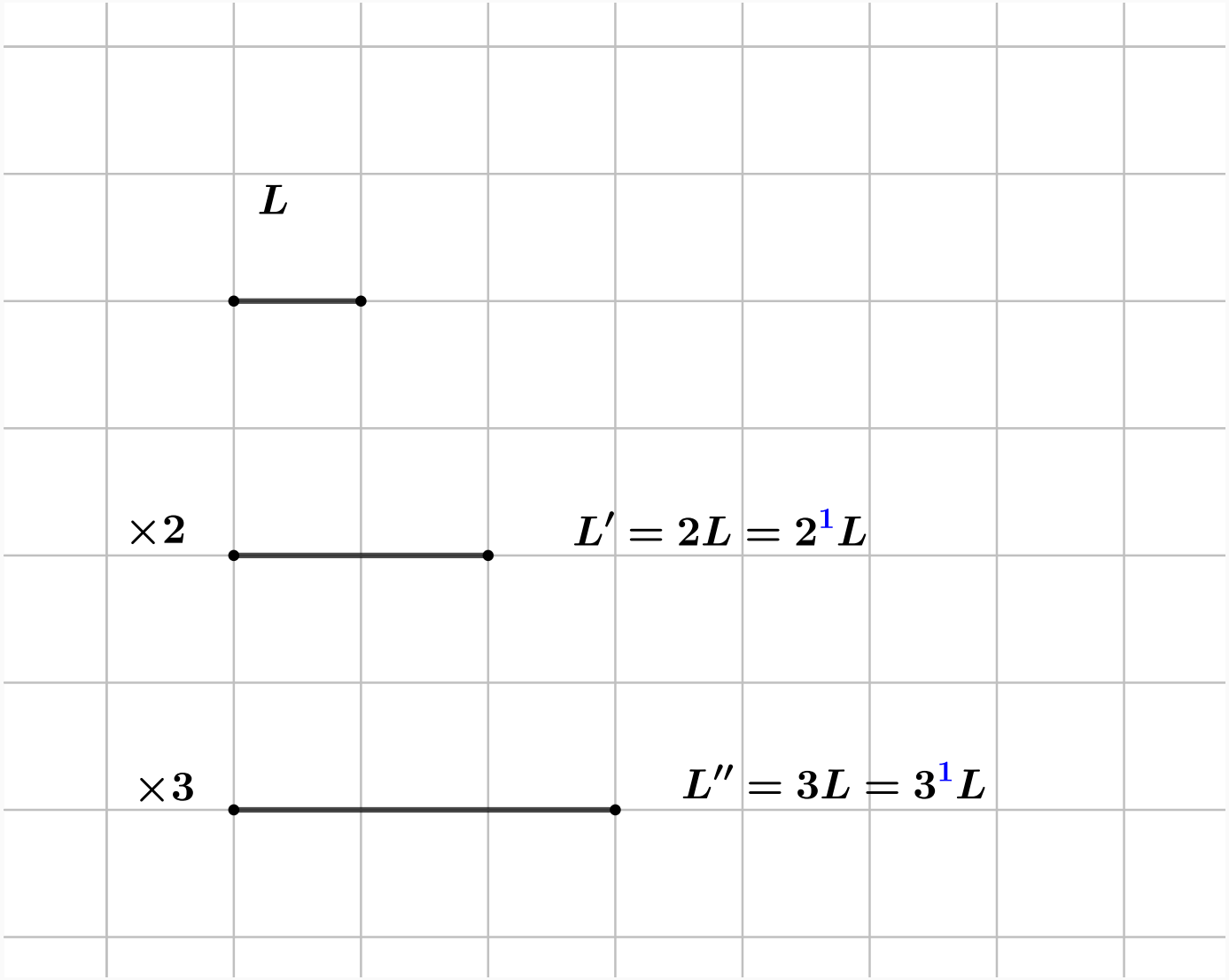
Il triangolo di Sierpinski



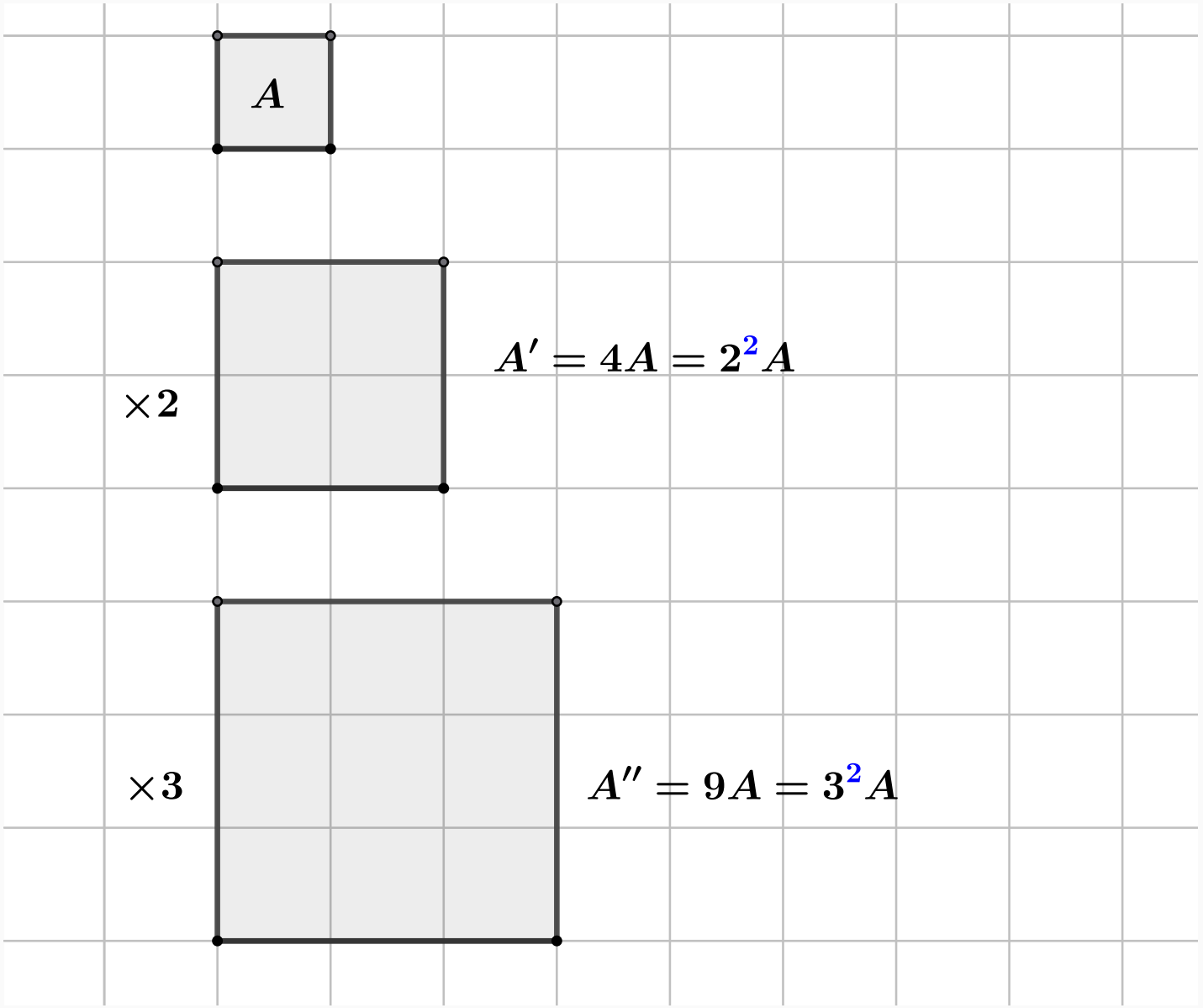


La dimensione frattale

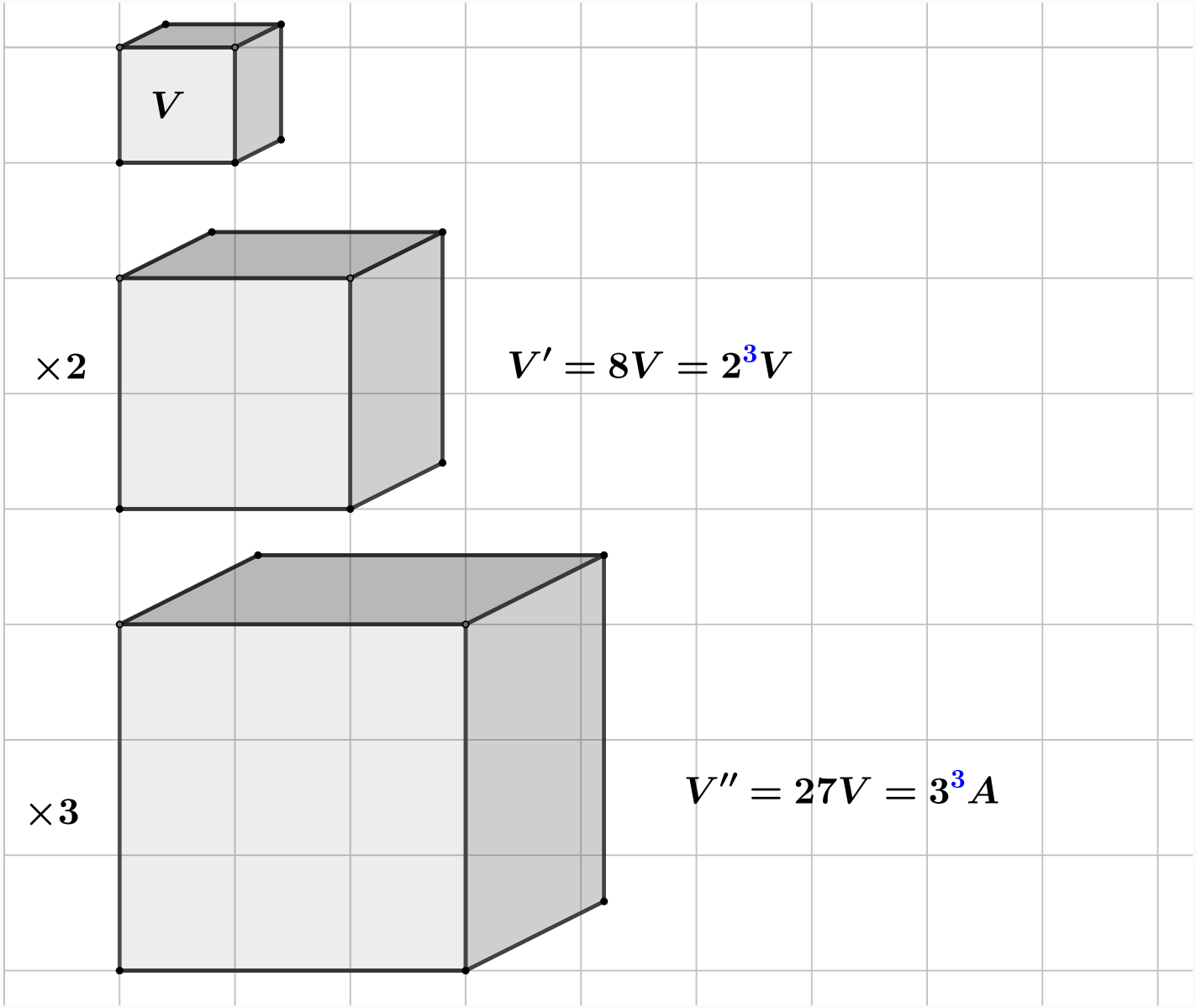
La dimensione frattale



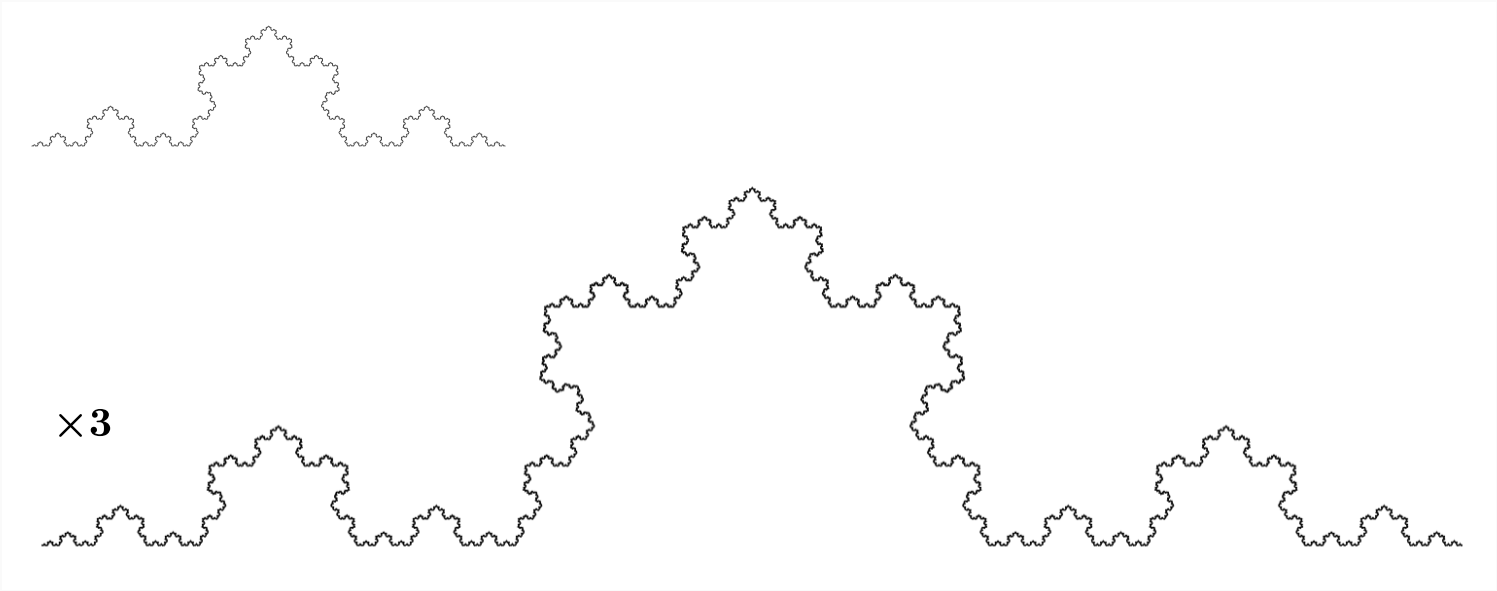
La dimensione frattale



La dimensione frattale

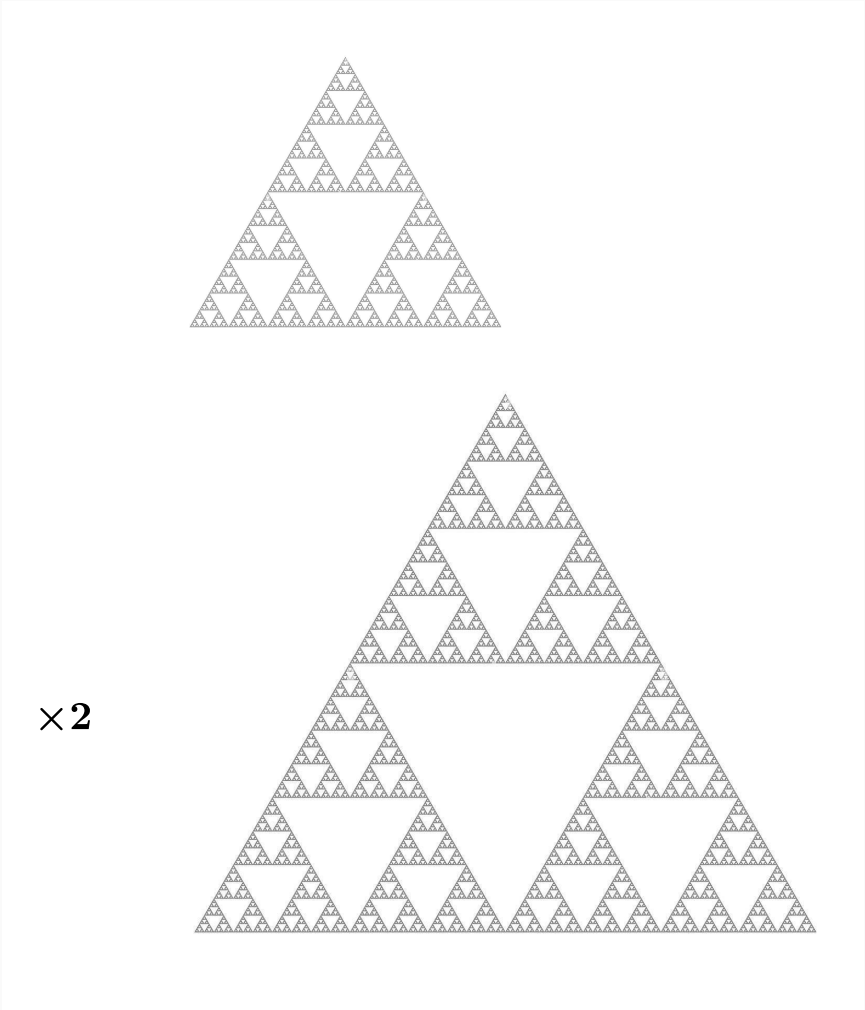


La dimensione frattale



$$4L = 3^d L \Longrightarrow 4 = 3^d \Longrightarrow d = \log_3 4 = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26.$$

La dimensione frattale



$$3A = 2^d A \Longrightarrow 3 = 2^d \Longrightarrow d = \log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.58.$$

L'insieme di Mandelbrot

Costruzione dell'insieme di Mandelbrot

Definiamo la funzione $f(x) = x^2 + c$, con $c \in \mathbb{R}$.

Fissiamo un valore di c, per esempio $c = 0$, e calcoliamo ripetutamente la f partendo da $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} x_0 = 0 &\Rightarrow x_1 = f(x_0) = f(0) = 0^2 + 0 = 0 \\ &\Rightarrow x_2 = f(x_1) = f(0) = 0^2 + 0 = 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Otteniamo la successione limitata $0, 0, 0, 0, \dots$

Costruzione dell'insieme di Mandelbrot

Se $c = 1$:

$$\begin{aligned} x_0 = 0 \Rightarrow x_1 &= f(x_0) = f(0) = 0^2 + 1 = 1 \\ \Rightarrow x_2 &= f(x_1) = f(1) = 1^2 + 1 = 2 \\ \Rightarrow x_3 &= f(x_2) = f(2) = 2^2 + 1 = 5 \\ \Rightarrow x_4 &= f(x_3) = f(5) = 5^2 + 1 = 26 \\ &\dots \end{aligned}$$

Otteniamo la successione illimitata $0, 1, 2, 5, 26, \dots$

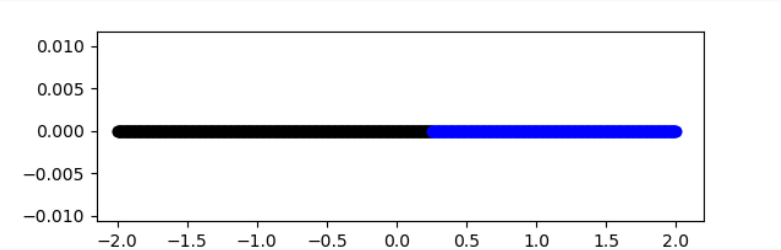
Costruzione dell'insieme di Mandelbrot

c	$(x_n)_{n\geq 0}$
0	$0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$
1	$0, 1, 2, 5, 26, 677, 458330, \ldots$
0.25	$0, 0.25, 0.3125, 0.3477, 0.3709, 0.3875, \ldots$
0.5	$0, 0.5, 0.75, 1.0625, 1.6289, 3.1533, \ldots$
-0.5	$-0.5, -0.25, -0.4375, -0.3086, -0.4048, -0.3362, \ldots$

Costruzione dell'insieme di Mandelbrot

Coloriamo di blu i valori di c che "esplodono" e coloriamo gli altri di nero.

c	$(x_n)_{n\geq 0}$
0	$0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$
1	$0, 1, 2, 5, 26, 677, 458330, \ldots$
0.25	$0, 0.25, 0.3125, 0.3477, 0.3709, 0.3875, \ldots$
0.5	$0, 0.5, 0.75, 1.0625, 1.6289, 3.1533, \ldots$
-0.5	$-0.5, -0.25, -0.4375, -0.3086, -0.4048, -0.3362, \ldots$



Non è una figura molto interessante...

Per ottenere una figura più interessante, abbiamo bisogni di numeri che si rappresentino in due dimensioni... i numeri complessi.

L'equazione

$$x^2 + 1 = 0$$

non ha soluzione nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.

Definiamo allora un nuovo numero i (chiamato *unità immaginaria*) che sia una soluzione dell'equazione. Allora:

$$i^2 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{i^2 = -1}$$

Un *numero complesso* z è un'espressione della forma

$$z = x + iy$$

dove x e y sono numeri reali. x è detta *parte reale* di z e y è detta *parte immaginaria* di z.

Operazioni con i numeri complessi

I numeri complessi rispettano (quasi) tutte le regole algebriche che valgono per i numeri reali e i polinomi.

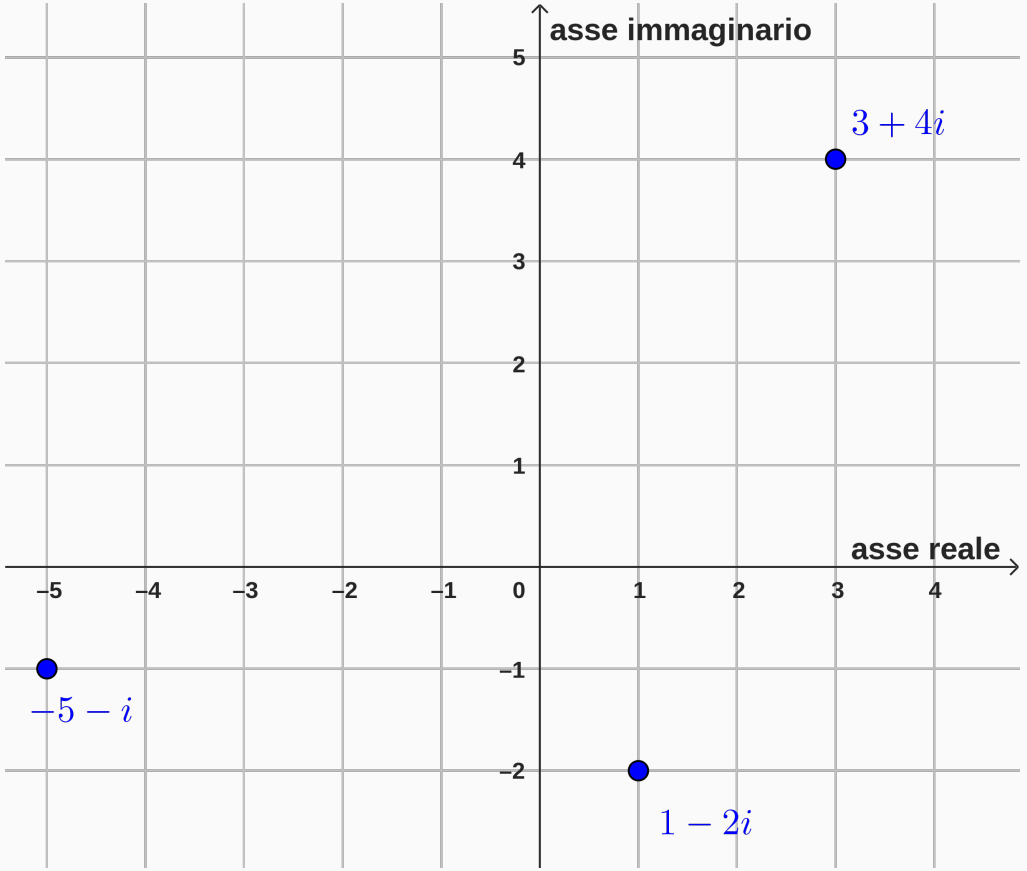
Somma: $(1 + 5i) + (2 + 4i) = 3 + 9i$

Prodotto: $(3 + 2i) \cdot (1 - 5i) = 3 - 15i + 2i - 10i^2 = 13 - 13i$

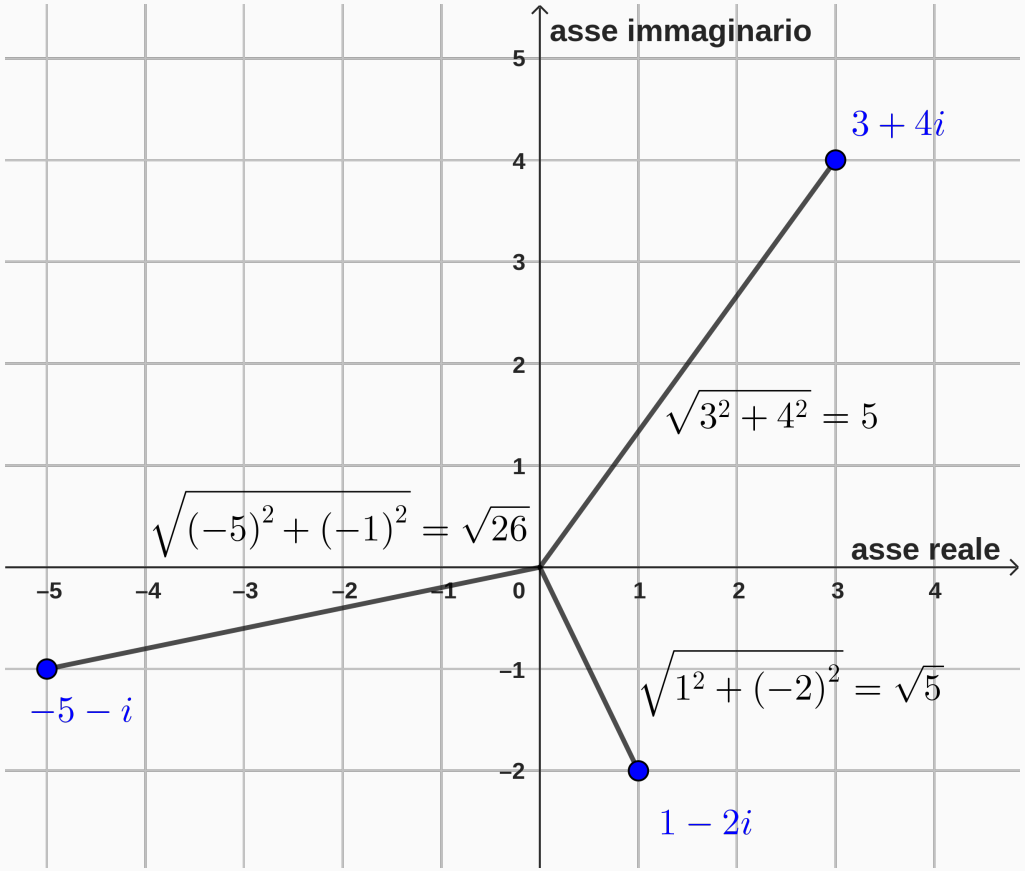
Quadrato: $(3 + 2i)^2 = 9 + 12i + 4i^2 = 5 + 12i$

Il piano complesso

Possiamo rappresentare graficamente un numero complesso $z = x + iy$ associandolo al punto (x, y) del piano cartesiano (che prende il nome di *piano complesso*).



Il modulo di un numero complesso



Definiamo il modulo del numero complesso $z = x + iy$ come

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

L'insieme di Mandelbrot

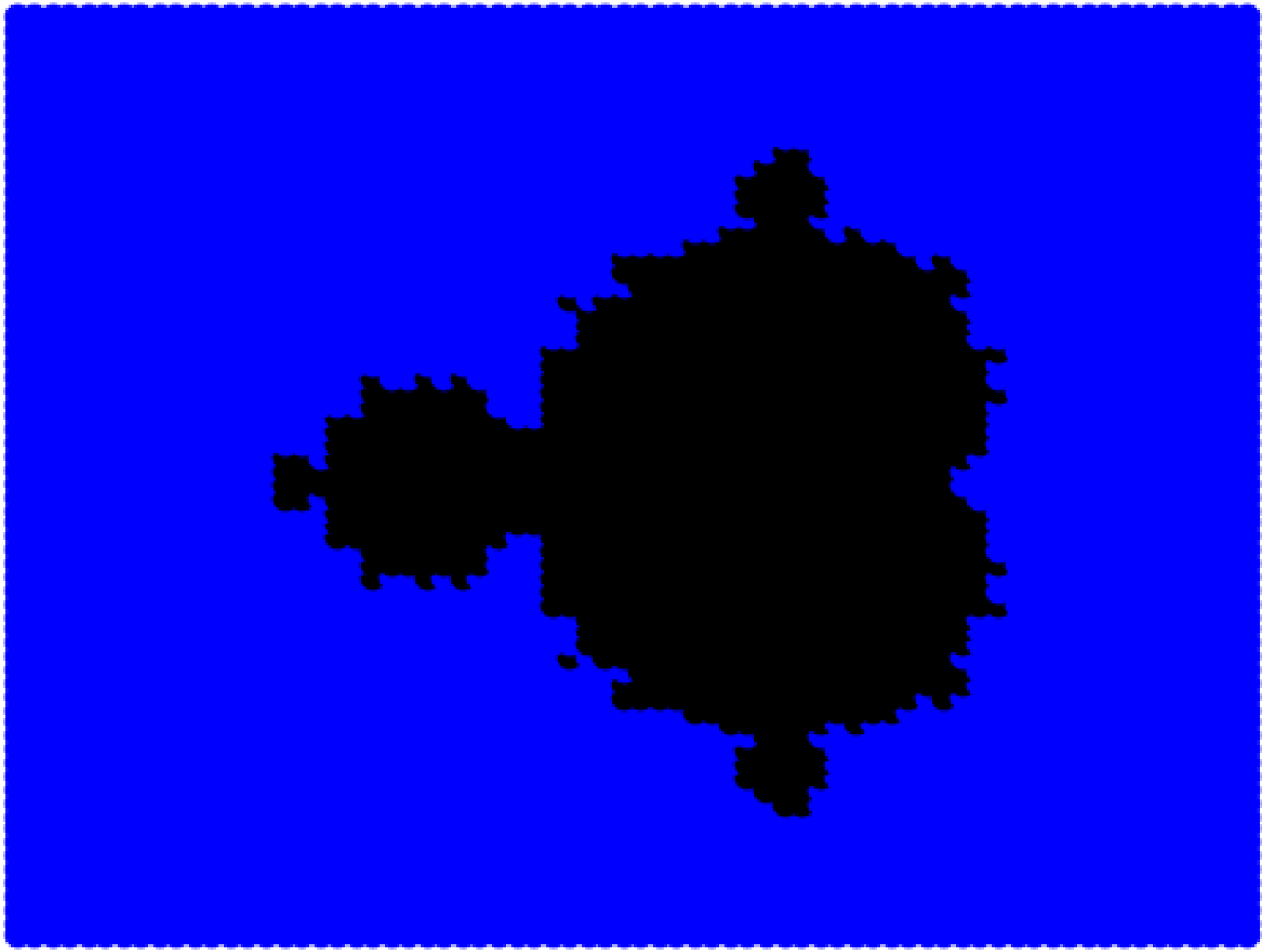
Nella funzione $f(x) = x^2 + c$ possiamo ora sostituire valori di c complessi.

Per esempio, se $c = i$, allora:

$$
\begin{aligned}
x_0 = 0 \Rightarrow x_1 &= f(x_0) = f(0) = 0^2 + i = i && |x_1| = 1 \\
\Rightarrow x_2 &= f(x_1) = f(i) = i^2 + i = -1 + i && |x_2| = \sqrt{2} \\
\Rightarrow x_3 &= f(x_2) = f(-1 + i) = (-1 + i)^2 + i = -i && |x_3| = 1 \\
\Rightarrow x_4 &= f(x_3) = f(-i) = (-i)^2 + i = -1 + i && |x_4| = \sqrt{2} \\
&\dots
\end{aligned}
$$

La successione dei moduli: $1, \sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, \dots$ è limitata, quindi nel piano complesso coloriamo il punto i di nero.

L'insieme di Mandelbrot



Frattali in natura

L’olmo



La felce



Il cavolo romano

